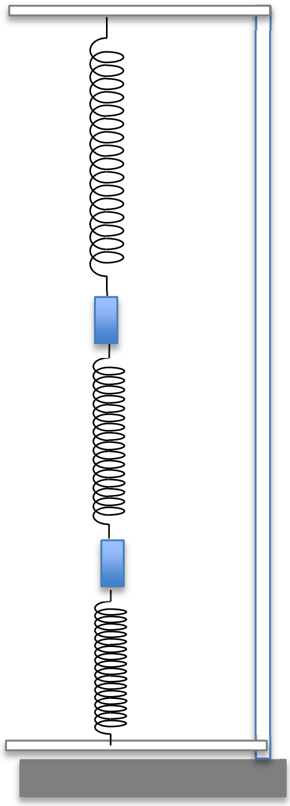
振動_3_3 つのばねでつながれた2物体の振動

印

組	番	

目的　ばねでつながれた多数の物体がどのような振動をするか調べる。何か法則性はあるか、一番単純な2物体を3つのばねで挟んだ状況について、実験的なアプローチと理論的なアプローチの両面で調べる。



方法　同じばね定数 k=3.5N/m の3つの（緑）ばねの間に、同じ質量 0.020kg の2つのおもりを挟むように実験台に取り付ける。

実験スタンドの上下にクランプを付け、横棒を固定する。次に1つ目のばねを上の棒から吊り下げ、その下に1つ目のおもりを吊り下げ、その下に2つ目のばねを吊り下げ、その下に2つ目のおもりを吊り下げ、その下に3つ目のばねを吊り下げて下端を下の棒に引っかける。

観察　2つのおもりをいい加減に振動させると、それぞれのおもりは単振動をせず、いくつかの振動が混じったような複雑な振動をする。なにかうまいやりかたで2つのおもりを振動させれば、2つの物体の動き方が違っても、1つ1つは単振動をするようにできるだろうか。そのとき観測される単振動の周期から導かれる合成ばね定数は求められるか。

実験的アプローチ

【実験1】1つのおもりだけに初期変位（このときもう一方は触れず）を与えて放しても、その後2つとも多重の混じった振動になってしまう。そこで2つのおもりに同時に初期変位を与えて一緒に放したら、各おもりそれぞれが単純な単振動をするような初期変位の与え方を試行錯誤して見つける。

2つのおもりそれぞれが単振動するパターンは2種類あるので2つとも見つけること。

注意 ： おもりの運動は、鉛直な一直線上で行うように。　（1点）

単振動の仕方 1 は、 単振動の仕方 2 は、

【実験2】 実験1で見つけた初期条件でそれぞれのおもりに単振動させたときの周期をストップウォッチで測定し、そこから合成ばね定数を求める。このとき質量はおもり1つの質量 m=0.020kg を使うこと。　$\pi = 3.1416$ とする　（1点）

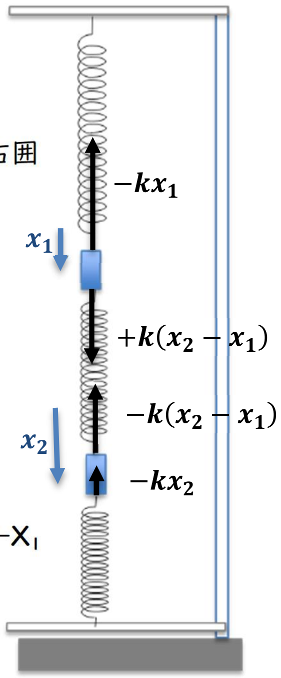
単振動の仕方	10 周期	1 周期 T	T^2	$\pi^2 \times 4 \times m$	ばね定数 k
単振動の仕方 1	秒	秒			k_1=　N/m
単振動の仕方 2	秒	秒			k_2=　N/m

考察　単振動させることが出来たとき、おもり同士の動きにはある関連があった。下向きの変位を正として、おもり1を X_1 動かしたとき、おもり2の動かし方 X_2 は X_1 とどんな関係になっていたか。2種類の振動のさせ方それぞれについて式で表しなさい　（1点）

単振動の仕方 1 のときは、 単振動の仕方 2 のときは、

理論的アプローチ

2つのおもりの運動を、運動方程式を利用して分析する。鉛直ばね振り子の学習から、つり合いの位置からの変位を考えれば、運動方程式に重力は入れなくてよい。



2つのおもりのつり合いの位置からの**下向きの変位**をx_1、x_2とすると、各ばねの伸び縮みが下右囲みのように解釈できるので、力は右図の矢印のようになり、運動方程式は次のように書ける。

上おもり　$ma_1=-kx_1+k(x_2-x_1)$ …①

下おもり　$ma_2=-kx_2-k(x_2-x_1)$ …②

x_1	上ばねの伸び
(x_2-x_1)	真ん中ばねの伸び
x_2	下ばねの縮み

もちろんこの方程式は①も②も右辺が複雑で一般的には単振動の解が得られない。

単振動するのは【実験2】考察から2つのおもりが関連した動きをしたときだけで、例えば $X_2=-X_1$ という動きであるが、この場合x_1-x_2という量を考えると$x_1-x_2=X_1+X_2=-2X_1$となってX_1は単振動するので、$x=x_1-x_2$という組み合わせでなら単振動の運動方程式（$ma=-kx$）を満たすと考えられる。

[一般化]

単振動になるx_1、x_2の組み合わせを、あるrを使って一般的に$x=x_1+rx_2$と表せたとする。rがある特別な値の時だけこの$x=x_1+rx_2$は単振動の運動方程式（$ma=-kx$）の形を満たすと考える。

実験なら実験をしてrを求めればいいが、逆に、ここでは理論的に、元の運動方程式から出発して単振動の運動方程式の形になるためのrの条件式を求める。

それぞれの運動方程式から右辺も左辺も ①＋r× ②と方程式ごと組み合わせる。

$$m(a_1+ra_2)=-k((2-r)x_1+(2r-1)x_2)$$

次に右辺を$-(2-r)k$で括ると

$$m(a_1+ra_2)=-(2-r)k\left(x_1+\frac{2r-1}{2-r}x_2\right)\quad\cdots③$$

③の運動方程式が、ある決まった r のときだけ単振動の運動方程式の形になるとすると$ma=-kx$に$a=a_1+ra_2$と$x=x_1+rx_2$を代入して

$$m(a_1+ra_2)=-k'(x_1+rx_2)\quad\cdots④$$

という形にまとめられるはずである。③が④の単振動の運動方程式の形になるために、rの条件式⑥が得られる。

$k'=(2-r)k$・・・⑤

$$r=\frac{2r-1}{2-r}\quad\cdot\cdot\cdot⑥$$

⑥をrについて解く（両辺に$2-r$をかけて）と2つ解がある。それを⑤に代入してk'を求めれば　（2点）

$r=$　　とき、$x=x_1+rx_2=x_1+$	$\boxed{}$	x_2で、合成ばね定数$k'=$	（k=3.5 を使って数値で）
$r=$　　とき、$x=x_1+rx_2=x_1+$	$\boxed{}$	x_2で、合成ばね定数$k'=$	（k=3.5 を使って数値で）

理論的にx_1、x_2をどう動かせば単振動するかもこれから分かる。

結論 実験的アプローチと理論的アプローチのそれぞれで得られた合成ばね定数を比較しなさい。　（１点）
